



TITLE:

離散 Dynkin 公式によるマルコフ連鎖上の最適停止問題の単調性と  
Bruss のオッズ定理 (不確実・不確定環境下における数理的意決定とその周辺)

AUTHOR(S):

穴太, 克則

---

CITATION:

穴太, 克則. 離散 Dynkin 公式によるマルコフ連鎖上の最適停止問題の単調性と Bruss のオッズ定理 (不確実・不確定環境下における数理的意決定とその周辺). 数理解析研究所講究録 2012, 1802: 281-287

ISSUE DATE:

2012-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/194325>

RIGHT:

# 離散 Dynkin 公式によるマルコフ連鎖上の最適停止問題の単調性と Bruss のオッズ定理<sup>1</sup>

芝浦工業大学・数理科学科 穴太 克則 (Katsunori Ano)  
Department of Mathematical Sciences,  
Shibaura Institute of Technology

## 1 はじめに

離散版生成作用素, 離散版 Dynkin 公式を導入し, これによりマルコフ連鎖上の最適停止問題の解法を考え, Chow, Robbins and Siegmund [4] の単調性を捉え直す. これを Bruss の Odds Theorem [2] の証明に適用する. Bruss の証明はとても技巧的であるが, よりシンプルに解くことができる.

## 2 最適停止における単調問題

### 2.1 離散 Dynkin 公式

マルコフ連鎖  $X = (X_n, \mathcal{F}_n, P_x), n = 1, 2, \dots, X_0 = x$  の状態空間を可測空間  $(E, \mathcal{B})$  とする.  $g$  を  $\mathcal{B}$ -可測関数とする. ここでは, 有界非負実数値連続関数とする.  $X_n$  に対する離散版生成作用素  $\mathcal{L}$  を次で定義する. 各  $x \in E$  に対して

$$\mathcal{L}g(x) = \mathcal{L}_\alpha g(x) := \alpha E_x[g(X_1)] - g(x), \quad \alpha \in (0, 1]. \quad (1)$$

連続の場合でのマルコフ過程  $X_t$  に対する無限小生成作用素  $\mathcal{L}$  :

$$\mathcal{L}g(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{E_x[g(X_t)] - g(x)}{t}$$

に対応する作用素とみなす.

**定理 1 (離散版 Dynkin 公式)** 任意の有界 (*a.s.*) な停止時刻  $\tau$  に対して,

$$E_x[\alpha^\tau g(X_\tau)] = g(x) + E_x \left[ \sum_{n=0}^{\tau-1} \alpha^n \mathcal{L}g(X_n) \right]. \quad (2)$$

**証明.** 各  $N \in \{0, 1, 2, \dots\}$  に対して, 停止時刻  $\tau_N := \min\{\tau, N\}$  とする.

$$E_x \left[ \sum_{n=0}^{\tau_N-1} \alpha^n \mathcal{L}g(X_n) \right] = \int \sum_{n=0}^{\tau_N-1} \alpha^n \mathcal{L}g(X_n) dP_x = \sum_{k=1}^N \int_{\{\tau_N=k\}} \sum_{n=0}^{k-1} \alpha^n \mathcal{L}g(X_n) dP_x$$

<sup>1</sup>This is an abbreviation of English version, “Monotone problem in optimal stopping via discrete version of Dynkin formula and Bruss’ Odds theorem”.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=n+1}^N \int_{\{\tau_N=k\}} \alpha^n \mathcal{L}g(X_n) dP_x = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\{\tau_N > n\}} \alpha^n \mathcal{L}g(X_n) dP_x \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\{\tau_N > n\}} (\alpha^{n+1} E_{X_n}[g(X_{n+1})] - \alpha^n g(X_n)) dP_x
\end{aligned}$$

$\{\tau_N > n\} \in \mathcal{F}_n$ ,  $E_{X_n}[g(X_{n+1})]$  は  $\mathcal{F}_n$ -可測だから,

$$\begin{aligned}
E_x \left[ \sum_{n=0}^{\tau_N-1} \alpha^n \mathcal{L}g(X_n) \right] &= \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\{\tau_N > n\}} \alpha^{n+1} g(X_{n+1}) dP_x - \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\{\tau_N > n\}} \alpha^n g(X_n) dP_x \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\{\tau_N = n+1\}} \alpha^{n+1} g(X_{n+1}) dP_x + \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\{\tau_N > n+1\}} \alpha^{n+1} g(X_{n+1}) dP_x \\
&\quad - \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\{\tau_N > n\}} \alpha^n g(X_n) dP_x.
\end{aligned}$$

上式の右辺 2 項目と 3 項目で項を相殺すると,

$$\begin{aligned}
E_x \left[ \sum_{n=0}^{\tau_N-1} \alpha^n \mathcal{L}g(X_n) \right] &= \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\{\tau_N = n+1\}} \alpha^{n+1} g(X_{n+1}) dP_x + \int_{\{\tau_N > N\}} \alpha^N g(X_N) dP_x \\
&\quad - \int_{\{\tau_N > 0\}} \alpha^0 g(X_0) dP_x.
\end{aligned}$$

$\tau_N = \min\{\tau, N\}$  を使って, 上式の右辺第 1 項を書き換えて

$$E_x \left[ \sum_{n=0}^{\tau_N-1} \alpha^n \mathcal{L}g(X_n) \right] = \int_{\{\tau_N \leq N\}} \alpha^\tau g(X_\tau) dP_x + \int_{\{\tau_N > N\}} \alpha^N g(X_N) dP_x - g(x).$$

再び  $\tau_N = \min\{\tau, N\}$  だから, 上式の左辺を書き換えると

$$\begin{aligned}
&\int_{\{\tau \leq N\}} \sum_{n=0}^{\tau-1} \alpha^n \mathcal{L}g(X_n) dP_x + \int_{\{\tau > N\}} \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n \mathcal{L}g(X_n) dP_x \\
&= \int_{\{\tau_N \leq N\}} \alpha^\tau g(X_\tau) dP_x + \int_{\{\tau_N > N\}} \alpha^N g(X_N) dP_x - g(x).
\end{aligned}$$

$N \rightarrow \infty$  とすると,  $g$  は有界であることと  $\tau < \infty$  a.s. と仮定していることより, (2) を得る.  $\square$

## 2.2 マルコフ連鎖上の最適停止問題に対する単調性

次のマルコフ連鎖上の最適停止問題を考える.

**問題 1** 任意の有界 (a.s.) な停止時刻  $\tau$  に対して,  $\sup_\tau E_x[\alpha^\tau g(X_\tau)]$  を達成する最適停止時刻  $\tau^*$  とそのときの最適値  $E_x[\alpha^{\tau^*} g(X_{\tau^*})]$  を求めたい.

マルコフ連鎖上の最適停止問題の一般解法は Shiryaev [10] に詳しく述べられているが, ここでは Chow et al. [4] の単調問題との関連に注意を払って見てゆく. 離散版生成作用素を使い, 次のように停止領域  $B$  と停止時刻  $\tau_1$  を定義する.

$$B := \{x : \mathcal{L}g(x) \leq 0\}, \quad \tau_1 := \inf\{n : X_n \in B\}. \quad (3)$$

$B = \emptyset$  ならば  $\tau_1 = \infty$  とする.

**定理 2** マルコフ連鎖  $X_n$  が  $B$  に必ず入る (a.s.) とする.

(A) すべての  $x \in B$  に対して,  $P_x(X_n \notin B \text{ となる } n \text{ が存在する}) = 0$

ならば,  $\tau_1$  が最適停止時刻  $\tau^*$  である.

**Remark 1** 分かりやすく述べれば, 条件 (A) は, “マルコフ連鎖  $X_n$  が一度  $B$  に入れば, その後 2 度と  $B$  からでることはない”ことを意味する.

**証明.** 任意の停止時刻  $\tau$  と非負実数値連続関数  $g$  に対し, 離散版 Dynkin 公式を使えば,

$$E_x[\alpha^{\tau_1} g(X_{\tau_1})] - E_x[\alpha^{\tau} g(X_{\tau})] = E_x \left[ \left\{ \sum_{n=\tau}^{\tau_1-1} \alpha^n \mathcal{L}g(X_n) \right\} 1_{\{\tau < \tau_1\}} \right] - E_x \left[ \left\{ \sum_{n=\tau_1}^{\tau-1} \alpha^n \mathcal{L}g(X_n) \right\} 1_{\{\tau > \tau_1\}} \right]$$

$B$  と  $\tau_1$  の定義と条件 (A) から, 右辺第 2 項はゼロ以下. ゆえに,  $E_x[\alpha^{\tau_1} g(X_{\tau_1})] \geq E_x[\alpha^{\tau} g(X_{\tau})]$ .  $\tau$  は任意だから,  $E_x[\alpha^{\tau_1} g(X_{\tau_1})] \geq \sup_{\tau} E_x[\alpha^{\tau} g(X_{\tau})]$ . したがって,  $\tau^* = \tau_1$ .  $\square$

**Remark 2**  $B = \{x : \alpha E_x[g(X_1)] \geq g(x)\}$  と書けば,  $B$  への最小到達時刻  $\tau_1$  は “現在停止したときの利得 ( $g(x)$ ) が, もう 1 期だけ行ってから停止したときの期待利得 ( $\alpha E_x[g(X_1)]$ ) 以上になれば直ちに停止する”時刻である. これは *one-step(or stage) look-ahead stopping time* とも呼ばれている. 条件 (A) を “ $B$  が closed である”と表現することもある (cf. Ross [9]).

### 2.3 離散時刻確率過程に対する単調性

いわゆる単調性は優マルチンゲールを用いて, 次のように定義される (p.54 in Chow et al. [4]).

**問題 2**  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n), P)$  上の利得を表す離散時刻確率過程  $Y_n$  と  $\mathcal{F}_n$  適合なすべての停止時刻  $\tau$  に対し,  $\sup_{\tau} E[Y_{\tau}]$  を達成する最適停止時刻とそのときの最大期待利得を求めたい.  $A_n := \{E[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leq Y_n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  としたとき, 「 $A_1 \subset A_2 \subset \dots; \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$ 」であるならば, 単調であると定義する.  $\tau_2 := \inf\{n : Y_n \geq E[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n]\}$  とする. このとき次が成り立つ.

**定理 3** (Chow et al. [4] Theorem 3.3) 停止問題が単調であり,  $P(\tau_2 < \infty) = 1, E[Y_{\tau_2}] < \infty$ , かつ  $\liminf_N \int_{\{\tau_2 > N\}} Y_n^+ dP = 0$  ならば,  $\tau_2$  が最適停止時刻である.

**Remark 3** 定理 3 の条件は, マルコフ連鎖上の最適停止問題の単調性では,  $\tau_1 < \infty$  a.s.,  $E_x[g(X_{\tau_1})] < \infty$ , かつ  $\liminf_N E_x[\alpha^n g^+(X_N) I(\tau_1 > N)] = 0$  に対応する: 最後の条件は,  $\tau_1 < \infty$  a.s. と  $g$  は非負可積分の仮定から成り立つ.

**Remark 4** 単調性は直感的にわかりやすく述べると “確率過程がある時刻以降に必ず優マルチンゲールになることが保証されていれば, 優マルチンゲールになったときに直ちに停止するのが最適”ということを意味している.

元の最適停止問題が単調ではないが, マルコフ連鎖上の最適停止問題に帰着させれば, うまく解ける場合がある. 例として Bruss のオッズ問題 [2] を見てみる.

### 3 Bruss のオッズ問題

#### 3.1 オッズ定理

**オッズ問題:**  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上に定義された事象  $A_1, A_2, \dots$  の定義関数を  $I_1, I_2, \dots$  とする.  $\mathcal{F}_n := \sigma(I_1, I_2, \dots, I_n)$  とし, 任意の  $k = 1, 2, \dots, N$  に対し,  $\{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k$  であり,  $\{1, 2, \dots, N\}$  に値を取るすべての停止時刻  $\tau$  の集合を  $T_N$  とする.  $\{\omega : I_k(\omega) = 1\}$  を“成功”と呼び,  $k$  を“成功時刻”という.  $I_1, I_2, \dots, I_N, N < \infty$  を逐次に観測して, 最後の成功で停止する (“win”と呼ぶ) 確率を最大にする最適停止時刻を求めよ.

Bruss [2] は  $I_1, I_2, \dots, I_N$  が独立, すなわち, ベルヌーイ確率変数列の場合を考えた. Win ならば利得 1, そうでなければ利得 0 とすれば, Bruss のオッズ問題は

$$\sup_{\tau \in T_N} E[I_\tau = 1, I_{\tau+1} = \dots = I_N = 0] = \sup_{\tau \in T_N} P(I_\tau = 1, I_{\tau+1} = \dots = I_N = 0)$$

を達成する最適停止時刻  $\tau^*$  とそのときの最大確率 ( $P(\text{win})$  と書くとする) を求めること. 答えは次の定理で与えられる.  $\mathcal{N} := \{1, 2, \dots, N\}$  とする.

**定理 4 (オッズ定理 [2])** 各  $j \in \mathcal{N}$  に対し,  $p_j := E[I_j]$ ,  $q_j = 1 - p_j$ ,  $r_j = p_j/q_j$  とする. このとき, 最適停止時刻  $\tau^*$  は  $\tau^* = \min\{i \geq i^* : I_k = 1\}$ . ここで,  $i^* = \min\{i \in \mathcal{N} : \sum_{j=i+1}^N r_j < 1\}$ . ただし,  $\min \emptyset = +\infty$  とし,  $b < a$  に対し  $\sum_{j=a}^b \cdot = 0$  とする. 最大確率は

$$P(\text{win}) = P_N(p_1, \dots, p_N) = \prod_{k=i^*}^N q_k \sum_{k=i^*}^N r_k. \quad (4)$$

#### 3.2 Chow et al [4] の意味では単調ではない

乾 [7] で以下の分析がなされている. 以下は乾 [7] からの引用. 最後の成功時刻  $L$  を  $L := L^{(N)} := \sup\{k \in \mathcal{N} : I_k = 1\}$  と定める. ただし,  $\sup \emptyset = 0$  と約束する. オッズ問題において  $Y_k = P(L = k | \mathcal{F}_k)$  と定義すれば, 問題 2 に帰着する. 実際,

$$\begin{aligned} E[Y_\tau] &= \sum_{k=1}^N E[Y_k; \tau = k] = \sum_{k=1}^N E[P(L = k | \mathcal{F}_k); \tau = k] = \sum_{k=1}^N E[P(L = k, \tau = k) | \mathcal{F}_k] \\ &= \sum_{k=1}^N P(L = k, \tau = k) = P(L = k) \end{aligned}$$

となり, オッズ問題は問題 2 に帰着する. ところで,  $Y_k = P(L = k | \mathcal{F}_k) = P(I_k = 1, I_{k+1} = \dots = I_N = 0 | \mathcal{F}_k) = 1_{\{I_k=1\}} P(I_{k+1} = \dots = I_N = 0)$ . また,  $E[Y_{k+1} | \mathcal{F}_k] = P(I_{k+1} = 1 | \mathcal{F}_k) P(I_{k+2} = \dots = I_N = 0) = p_{k+1} P(I_{k+2} = \dots = I_N = 0)$ . したがって,

$$Y_k \geq E[Y_{k+1} | \mathcal{F}_k] \iff 1_{\{I_k=1\}} \prod_{j=k+1}^N q_j \geq p_{k+1} \prod_{j=k+1}^N q_j \iff 1_{\{I_k=1\}} \geq r_{k+1}$$

である. よって, Chow et al. の意味では単調にはなっていない.

### 3.3 マルコフ連鎖上の最適停止問題へ帰着

Ano et al. [1] はオッズ問題をマルコフ連鎖上の単調性を使ってシンプルに解いている。しかし, Chow et al. の意味での停止問題の単調性とマルコフ連鎖上の停止問題の単調性の関係は省略されている。この関係を詳しく見てゆく。オッズ問題において“成功”が出たときのみに停止すればいいことに注目する。観測を続けて  $j \in \{1, \dots, n\}$  個目の成功が出た時刻が  $n$  であったとする。このとき,  $\{X_j = n\} := \{I_1 \text{ から } I_{n-1} \text{ の間に } j-1 \text{ 個の成功, } I_n = 1\}$  と定義する。観測を続けて  $j+1$  個目の成功が出るのが  $n+k, k=1, 2, \dots, N-n$  であるとする。すなわち,  $\{X_{j+1} = n+k\} := \{I_1 \text{ から } I_{n+k-1} \text{ の間に } j \text{ 個の成功, } I_{n+k} = 1\}$ .  $\{X_j = n\}$  を“状態  $(n, j)$  にある”事象と呼ぶと, 状態  $(n, j)$  から状態  $(n+k, j+1)$  に 1 ステップで推移する確率 ( $j$  番目の成功が時刻  $n$  で出たとき,  $j+1$  番目の成功が時刻  $n+k$  で出る確率) は

$$\begin{aligned}
 & P(X_{j+1} = n+k | X_j = n) \\
 &= P(I_1 \text{ から } I_{n+k-1} \text{ の間に } j \text{ 個の成功, } I_{n+k} = 1 | I_1 \text{ から } I_{n-1} \text{ の間に } j-1 \text{ 個の成功, } I_n = 1) \\
 &= P(I_{n+1} = \dots = I_{n+k-1} = 0, I_{n+k} = 1 | I_1 \text{ から } I_{n-1} \text{ の間に } j-1 \text{ 個の成功, } I_n = 1) \\
 &= \frac{P(I_{n+1} = \dots = I_{n+k-1} = 0, I_{n+k} = 1, I_1 \text{ から } I_{n-1} \text{ の間に } j-1 \text{ 個の成功, } I_n = 1)}{P(I_1 \text{ から } I_{n-1} \text{ の間に } j-1 \text{ 個の成功, } I_n = 1)} \\
 &= \frac{P(I_{n+1} = \dots = I_{n+k-1} = 0, I_{n+k} = 1, I_n = 1)}{P(I_n = 1)} \quad (I_k \text{ の独立性から}) \\
 &= P(I_{n+1} = \dots = I_{n+k-1} = 0, I_{n+k} = 1 | I_n = 1) \tag{5}
 \end{aligned}$$

で定まる。  $X$  は推移確率  $P(X_{j+1} = n+k | X_j = n)$  を持つマルコフ連鎖を構成する。したがって, オッズ問題はマルコフ連鎖上の最適停止問題 1 に帰着する。実際, 各  $x = 1, 2, \dots, N$  に対して,  $g(x) = P(x = L)$  とおき,  $\alpha = 1, X_0 = 0$  と便宜上おく。更に停止時刻  $\tau$  に対し,  $\sigma$  を  $X_\sigma = \tau$  をみたす停止時刻とする。オッズ問題は

$$\begin{aligned}
 & \sup_{\tau \in \mathcal{I}_N} P(I_\tau = 1, I_{\tau+1} = \dots = I_N = 0) = \sup_{\tau \in \mathcal{I}_N} P(\tau = L) = \sup_{\sigma \in \mathcal{I}_N} P(X_\sigma = L) \\
 &= \sup_{\sigma \in \mathcal{I}_N} E_{X_0}[1_{\{I_\tau = 1\}} P(X_\sigma = L)] \quad (X \text{ は成功しているときのみで定義される}) \\
 &= \sup_{\sigma \in \mathcal{I}_N} E_{X_0}[g(X_\sigma)]
 \end{aligned}$$

となり, 推移確率 (5) を持つマルコフ連鎖  $X_0, X_1, \dots, X_N$  上の最適停止問題 1 に帰着する。

$X_j = n$  であるとする。この条件のもとで ( $B$  の中に書くことを省略),  $B$  は,

$$\begin{aligned}
 B &= \{n \in \mathcal{N} : \mathcal{L}g(n) \leq 0\} = \{n \in \mathcal{N} : E_n[g(X_{j+1})] \leq g(n)\} \\
 &= \left\{ n \in \mathcal{N} : E_n \left[ \sum_{k=1}^{N-n} P(X_{j+1} = n+k | X_j = n) g(n+k) \right] \leq g(n) \right\} \\
 &= \left\{ n \in \mathcal{N} : \sum_{k=1}^{N-n} P(I_{n+1} = \dots = I_{n+k-1} = 0, I_{n+k} = 1, I_{n+k+1} = \dots = I_N = 0 | I_n = 1) \right. \\
 &\quad \left. \leq P(I_{n+1} = \dots = I_N = 0) \right\} \tag{6} \\
 &= \left\{ n \in \mathcal{N} : \sum_{k=1}^{N-n} \left( \prod_{\ell=n+1}^{n+k-1} q_\ell \right) p_{n+k} \left( \prod_{\ell=n+k+1}^N q_\ell \right) \leq \prod_{k=n+1}^N q_k \right\} = \left\{ n \in \mathcal{N} : \sum_{k=n+1}^N r_k \leq 1 \right\}.
 \end{aligned}$$

$f(n) := \sum_{k=n+1}^N r_k$  は  $n$  について減少関数だから、一度ある  $n$  で  $f(n) \leq 1$  となれば、 $f(n+1) \leq 1, \dots, f(N-1) \leq 1$  である。マルコフ連鎖  $X$  が、一度  $B$  に入れば二度と  $B$  から出る (a.s.) ことはない。したがって、条件 (A) を満たす。また停止するときと継続するときの価値が同じときには継続することにすれば、最後の式の右辺の中の等号はなくなる。最適停止時刻  $\tau^*$  は

$$\tau^* = \inf \left\{ n \in \mathcal{N} : \sum_{k=n+1}^N r_k < 1 \text{ \& } I_n = 1 \right\}$$

で与えられる。

**Remark 5** このように毎回、元の停止問題からマルコフ連鎖上の停止問題の構成を書き下してゆくのは少々たいへん。要になるところは (6) のように、ワンステップにおいて

“P(現在の成功で停止して win) と P(次に初めて出る成功で停止して win) を比べる” ことである。このときに最適性の条件 (A) を確認すれば解ける場合が少なくない。

オッズ定理は様々な停止問題に適用できるエレガントなシンプルさを持つ。その例を見てゆく。

### 3.4 オッズ定理の例 1:最後の6の目を当てるゲーム

**問題 3** サイコロを 10 回投げる。最後の 6 の目であることを当てる確率を最大にする最適停止時刻とそのときの最大確率を求めよ。

オッズ問題で、 $n$  回目のサイコロ投げで 6 の目が出たとき、 $I_n = 1$  とする。6 の目以外が出たとき、 $I_n = 0$  とする。このとき  $p_n = 1/6, q_n = 5/6, r_n = 1/5, \forall n = 1, \dots, 10$  であるから、オッズ定理より最適停止時刻は

$$\tau^* = \inf \left\{ n \in \{1, 2, \dots, 10\} : \sum_{k=n+1}^{10} \frac{1}{5} < 1 \text{ \& } I_n = 1 \right\} = \inf \{ n \in \{7, 8, 9, 10\} \text{ \& } I_n = 1 \}.$$

すなわち、サイコロ投げの 6 回目までは何が出ようとパスして、7 回目以後に初めて出る 6 の目を選ぶことが最適となる。このとき、6 の目を当てる最大確率は、

$$P(\text{win}) = P_{10} \left( \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{6} \right) = \prod_{k=7}^{10} \frac{5}{6} \sum_{k=7}^{10} \frac{1}{5} = \left( \frac{5}{6} \right)^4 \frac{4}{5} = 0.3858 \dots$$

### 3.5 オッズ定理の例 2: 古典的秘書問題

**問題 4** 一人の秘書を雇いたい。面接した応募者には同ランクはなくランク付けができる（相対ランクという）。一人ずつ面接をする毎に、今までに面接した応募者の相対ランクに基づき、採用するかどうかを決めなければならない。一度不採用にした応募者を採用することはできない。 $N$  人の応募者があり、 $N$  人の面接の順列の一つが起こる確率が  $1/N!$  のとき、 $N$  人中のベストランクを得る確率を最大にする最適停止時刻とそのときの最大確率を求めよ。

$X_n$  を  $n$  人目の面接者の相対ランクとする. 相対ランク 1 を最も良い, 相対ランク 2 を次に良い, ... とする. 相対ランク 1 のみしか採用しないことに注目する. 相対ランク 1 の応募者を面接することを “成功” とみなす. このとき, 古典的秘書問題は, 各  $n = 1, 2, \dots, N$  に対し,  $p_n = P(X_n = 1) = 1/n$ ,  $q_n = (n-1)/n$ ,  $r_n = 1/(n-1)$  を持つオッズ問題に帰着する. したがって, 最適停止時刻  $\tau^*$  は

$$\tau^* = \inf \left\{ n \in \mathcal{N} : \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k-1} < 1 \text{ \& } X_n = 1 \right\}.$$

言い換えると,  $i^* = \inf \left\{ n \in \mathcal{N} : \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k-1} < 1 \right\}$  としたとき, 「 $i^* - 1$  番目の面接者まではパスして,  $i^*$  以後に面接する相対ランク 1 の応募者を採用する」ことが最適である. このとき,  $N$  人中のベストランクを得る最大確率は

$$P_N(\text{win}) = P_N \left( 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{N} \right) = \prod_{k=i^*}^N \frac{k-1}{k} \sum_{k=i^*}^N \frac{1}{k-1}.$$

$N \rightarrow \infty$  のとき  $P_N(\text{win}) \rightarrow e^{-1} = 0.3678 \dots$  となる.

**Remark 6** 興味深いことに *Bruss [3]* は, オッズ問題においてどのような  $p_1, p_2, \dots, p_N$  に対しても,  $\lim_{N \rightarrow \infty} P_N(\text{win}) > e^{-1}$  を発見している. 古典的秘書問題はオッズ問題の  $P_N(\text{win})$  の下限を与えていることがわかる.

## 参考文献

- [1] Ano, K., Kakinuma, H. and Miyoshi, N. (2010), “Odds theorem with multiple selection chances,” *J. Appl. Prob.*, **47**, 1093-1104.
- [2] Bruss, F. T. (2000), “Sum the odds to one and stop,” *Annals of Probability*, **28**, 1384-1391.
- [3] Bruss, F. T. (2003), “A note on bounds for the odds theorem of optimal stopping,” *Annals of Probability*, **31**, 1859-1861.
- [4] Chow, Y. S., Robbins, H. and Siegmund, D. O., (1971). *Theory of Optimal Stopping*. Houghton Mifflin, Boston.
- [5] Dynkin, E. B. and Yushkevitch, A. A., (1969). *Markov Process: Theorems and Problems*. Plenum Press, New York.
- [6] Ferguson, S. T., (2000). *Optimal Stopping and Applications*. Electronic Text at <http://www.math.ucla.edu/~tom/Stopping/Contents.html>.
- [7] 乾 仁., (2011). Bruss の最適停止定理について. 神戸大学大学院理学研究科博士前期課程.
- [8] Neveu, J., (1975). *Discrete-Parameter Martingales*. North-Holland, New York.
- [9] Ross, S. M., (1970). *Applied Probability Models with Optimization Applications*. Holden-Day, San Francisco.
- [10] Shiryaev, A. N., (1978). *Optimal Stopping Rules*. Springer-Verlag, New York.